TD 1 : Propriétés élémentaires des séries entières

Exercice 1. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

a. $\sum_{n\geq 0} q^{n^2} z^n$, où $|q| < 1$,
b. $\sum_{n\geq 0} n^p z^n$, où $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$,
c. $\sum_{n\geq 0} n!\ z^{n^2}$,
d. $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, où $a_{2n+1} = a^{2n+1}$, $a_{2n} = b^{2n}$ et $0 < a, b < 1$.

Exercice 2. Notons $\rho(H)$ le rayon de convergence d'une série entière H. Soient $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $T(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$.

1. Rappeler les relations entre $\rho(S)$, $\rho(T)$, $\rho(S + T)$, $\rho(S \times T)$, $\rho(S \circ T)$.
2. On suppose $b_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$. Posons :

$$U(z) = \sum_{n\geq 0}(a_n)^p z^n,\ V(z) = \sum_{n\geq 0} a_n b_n z^n,\ W(z) = \sum_{n\geq 0}(a_n/b_n)z^n.$$

   Montrer que $\rho(U) = \rho(S)^p$, $\rho(V) \geq \rho(S)\rho(T)$ et si $\rho(T) > 0$, que $\rho(W) \leq \rho(S)/\rho(T)$. Dans les deux dernières situations, donner des exemples de cas d'égalité et d'inégalité stricte.

Exercice 3. Soit $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Pour $n \geq 0$, posons $U(z) = \sum_{n\geq 0} s_n z^n$ et $V(z) = \sum_{n\geq 0} t_n z^n$ avec

$$s_n = a_0 + \cdots + a_n \quad \text{et} \quad t_n = \frac{1}{n+1}(s_0 + \cdots + s_n),$$

Montrer que les rayons de convergence de U et de V sont égaux à 1 et que pour tout $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1-z} \sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} s_n z^n.$$

Exercice 4. Soit la série entière

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} z^{n!}.$$

1. Montrer que le rayon de convergence de f est 1.
2. Montrer que f n'est prolongeable par continuité en aucun point du cercle de centre 0 et de rayon 1.

Exercice 5. Soit $n \geq 1$ un entier et $z \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$(1 + \frac{z}{n})^n = 1 + z + \sum_{2\leq p\leq n}\ \prod_{1\leq k\leq p-1} (1 - \frac{k}{n})z^p/p!.$$

En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$e^z = \lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{z}{n})^n.$$

Exercice 6. Soit $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho(S)$. On suppose les a_n donnés par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} a_0 = 0,\ a_1 = 1 \\ a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2},\ n \geq 2, \end{cases}$$

où α et β sont deux réels fixés.

1. Soit $c = \max\{|\alpha|,\ |\beta|,\ 1/2\}$. Montrer que $|a_n| \leq (2c)^{n-1}$, $n \geq 1$. En déduire que $\rho(S) > 0$.

2. Montrer que si $|z| < \rho(S)$, alors :

$$S(z) = \frac{z}{1 - \alpha z - \beta z^2}.$$

3. Discuter le cas $\beta = 0$.

4. On suppose $\beta \neq 0$. Soient z_1 et z_2 les deux racines de $\beta X^2 + \alpha X - 1 = 0$. En décomposant $z/(1 - \alpha z - \beta z^2)$ en éléments simples, exprimer a_n en fonction de z_1 et de z_2. En utilisant éventuellement l'exercice (2), conclure que :

$$\rho(S) = \min\{|z_1|,\ |z_2|\}.$$

Exercice 7. On définit :

$$\begin{cases} \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \\ \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \end{cases}$$

1. Montrer que pour tous z, z' dans $\mathbb{C}$, les formules bien connues suivantes sont encore vraies :

$$\begin{cases} \cos(z + z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z', \\ \sin(z + z') = \sin z \cos z' + \cos z \sin z', \\ \cos^2 z + \sin^2 z = 1. \end{cases}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation:

$$\cos(z) = -2.$$

3. Par définition, $\cosh(z) = \cos(iz)$, $\sinh(z) = -i \sin(iz)$. Comme ci-dessus, établir les formules correspondantes.

Exercice 8.

1. Développer en série entière pour x réel > 0 :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t/x}\ \frac{\sin t}{t}\ dt.$$

   Donner le domaine de validité de l'expression obtenue puis le rayon de convergence de la série entière correspondante.

2. Reconnaitre le développement obtenu, et en déduire une formule plus simple pour f?

Exercice 9.

1. Soient $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ et $(\beta_n)_{n\geq 1}$ deux suites de nombres complexes telles que :

   – Il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$:

   $$|\alpha_1 + \cdots + \alpha_n| \leq M.$$

   – Les β_n sont des réels positifs formant une suite décroissante.

   Montrer alors que pour tout $n \geq 1$, on a $|\alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n| \leq M\beta_1$.

2. On considère maintenant une série entière $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, où les a_n sont complexes, telle $\rho(S) = 1$ et $\sum_{n\geq 0} a_n$ soit convergente.

   Montrer que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge uniformément dans l'intervalle fermé $[0, 1]$.

   En conclure que :

   $$\lim_{x\to 1, x<1} \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} a_n.$$

TD 2 : Propriétés élémentaires des fonctions holomorphes
Équations de Cauchy-Riemann

Exercice 1. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont holomorphes sur $\mathbb{C}$?

$$z \mapsto \frac{1}{1+z^2} \qquad z \mapsto e^{-|z|^2} \qquad z \mapsto e^{-z^2} \qquad z \mapsto z^2 \arg(z) \qquad z \mapsto \cos(x^2)\sin(y^2)$$

Exercice 2. L'application $z \mapsto \bar{z}$ est-elle holomorphe ?

Exercice 3. Déterminer f holomorphe sur $\mathbb{C}$, dont la partie réelle est $u(z) = xy$.

Exercice 4. Même question avec $u(z) = \sin(x)\cosh(y)$.

Exercice 5. Montrer si f est holomorphe, ses parties réelle et imaginaire sont harmoniques, c'est-à-dire vérifient $\Delta u = \Delta v = 0$ (si cela n'a pas encore été vu en cours, on admettra que toute fonction holomorphe est C^2).

Exercice 6. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction C^2. Soit f une fonction holomorphe de $f^{-1}(\Omega)$ (Ω identifié à un ouvert de $\mathbb{C}$) dans Ω. Calculer le laplacien de $\psi : (x, y) \mapsto \phi(u(x, y), v(x, y))$. Que peut-on dire si ϕ est harmonique ?

Exercice 7. Soit f continue de $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\alpha \not\equiv \beta[\pi]$ tels que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+te^{i\alpha}) - f(a)}{te^{i\alpha}} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te^{i\beta}) - f(a)}{te^{i\beta}}$$

et que cette limite est fonction continue de a. Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 8. Soit D un ouvert convexe du plan et $f(z)$ une fonction holomorphe dans D. Montrer que pour tout couple de points (a, b) dans D, on peut trouver deux points c et d sur le segment joignant a et b tels que l'on ait :

$$f(a) - f(b) = (a-b)(\Re(f'(c)) + i\Im(f'(d))).$$

On pourra introduire la fonction $F(t) = f(b+(a-b)t)/(a-b)$, $t \in \mathbb{R}$, et appliquer le théorème des accroissements finis aux parties réelle et imaginaire.

Exercice 9. Soit f holomorphe dans un ouvert D ne contenant pas 0. Soit $g(r, \theta) = f(re^{i\theta})$. Quelle est la relation liant $\partial g/\partial r$ et $\partial g/\partial \theta$?

TD 3 : Prolongement analytique, Pôles, Singularités

Exercice 1. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui vérifie $f(1/n) = 1/n^2$, pour tout $n \geq 1$. Montrer que $f(z) = z^2$.

Exercice 2. Existe-t-il une série entière $U(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence strictement positif, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand, on ait :

$$
\begin{array}{ll}
a. & U(1/n) = \sin(n\pi/2) \ ? \\
b. & U(1/n) = \frac{1}{n}\cos(n\pi) \ ? \\
c. & U(1/n) = \frac{1}{2n+1} \ ? \\
d. & U(1/n) = e^{-n} \ ?
\end{array}
$$

Exercice 3. Soit D un ouvert connexe, symétrique par rapport à l'axe réel et ayant une intersection non vide I avec ce dernier.

1. Montrer que toute fonction holomorphe dans D peut se mettre sous la forme suivante (de manière unique) :
$$f(z) = g(z) + ih(z),\ z \in D,$$
où g et h sont holomorphes dans D, réelles sur I.

2. Montrer qu'alors :
$$\overline{g(\bar z)} = g(z),\ h(\bar z) = \overline{h(z)} \text{ et } \overline{f(\bar z)} = g(z) - ih(z).$$

Exercice 4. Soit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ une fonction holomorphe dans un ouvert connexe D. Si on a $au(x,y) + bv(x,y) = c$ dans D, a, b et c étant des constantes réelles non nulles, montrer que f est constante dans D.

Exercice 5. Soit f holomorphe dans $D(0,R)$. Montrer que si l'une des fonctions suivantes est constante, alors f aussi : $\Re(f), \Im(f), |f|, \arg(f)$.

Exercice 6. Montrer que la fonction $z \longmapsto e^{1/z} - 1$ est holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ et que 0 est une singularité essentielle ainsi qu'un point d'accumulation de l'ensemble de ses zéros.

Exercice 7. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe D de $\mathbb{C}$ et partout non nulles. On suppose qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans D telle que :

$$\lim a_n = a \text{ et } a \in D,\ a_n \neq a,\ \forall n \geq 0,$$

et

$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)},\ \forall n \geq 0.$$

Montrer qu'il existe une constante $c \neq 0$ telle que $f(z) = cg(z)$, $z \in D$.

Exercice 9. Classer les points singuliers de :

$$\frac{1}{\cosh(z)},\quad \frac{z}{\sin z},\quad z\cos(\frac{1}{z}),\quad \frac{1}{z(e^z - 1)}.$$

TD 4 : Fonctions analytiques et holomorphes, Intégration sur des chemins

Exercice 1. Une détermination de $\arg(z)$ sur un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ est une fonction continue f définie sur D telle que pour tout $z \in D$ on ait $z = |z|e^{if(z)}$. Montrer qu'il n'existe pas de détermination continue de $\arg(z)$ sur $\mathbb{C}^*$. En trouver une sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Exercice 2. Soit $S(z) = \sum_{n\geq 1} z^n/n^2$ et D l'intersection des deux disques ouverts $|z| < 1$ et $|z-1| < 1$.

1. Montrer qu'il existe une constante a telle que l'on ait :

$$S(z) + S(1-z) = a - \log z \log(1-z),$$

   où log désigne la détermination principale du logarithme dans le demi-plan $Re(z) > 0$ (qui contient D). On pourra remarquer que si $z \in D$, alors $\log(1-z) = zS'(z)$ et qu'également :

$$\frac{d}{dz}(\log z \log(1-z)) = \frac{\log(1-z)}{z} - \frac{\log z}{1-z}.$$

2. Montrer finalement que

$$a = \sum_{n\geq 1} 1/n^2 \text{ et } a - (\log 2)^2 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 2^{n-1}}.$$

Exercice 3. Soit γ le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct. Pour $m \in \mathbb{Z}$, calculer puis donner directement la valeur de l'intégrale $\int_\gamma z^m \, dz$.

Exercice 4. Montrer que si $f(z)$ est continue dans le disque fermé $|z| \leq r$, holomorphe dans $|z| < r$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi, \ \forall |z| < r,$$

avec $C = \{|\xi| = r\}$, le cercle parcouru une fois dans le sens direct.

Exercice 4. Soit γ le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct et f continue bornée dans le disque unité.

1. Montrer que :

$$\overline{\int_\gamma f(z) \, dz} = -\int_\gamma \bar{f}(z) \, \frac{dz}{z^2}.$$

2. Supposons de plus que f est holomorphe dans $|z| \leq 1$. Montrer que :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\bar{f}(z)}{z-a} \, dz = \bar{f}(0), \text{ si } |a| < 1 \text{ et } \bar{f}(0) - \bar{f}(1/a), \text{ si } |a| > 1.$$

Exercice 5. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe un entier $n \geq 0$ et deux réels R et M tels que $|f(z)| \leq M|z|^n$, pour $|z| \geq R$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus n.

Exercice 6. Soit f holomorphe dans $|z| < R$. Posons $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$.

1. Montrer que $r \longmapsto M(r)$ est une fonction croissante dans $0 \leq r < R$.
2. Montrer que $M(r)$ est strictement croissante si f n'est pas constante.

Exercice 7. Soit f holomorphe sur un ouvert D connexe telle que $\mu = \inf_{z\in D} |f(z)| > 0$. Montrer que soit f est constante dans D, soit $|f(z)| > \mu$, $\forall z \in D$.

Exercice 8. Soit f holomorphe sur $D = \{|z| < 1\}$, continue sur $\bar{D}$ et telle que $|f| = 1$ sur $\{|z| = 1\}$.

1. Montrer que f est soit constante, soit s'annule au moins une fois dans D.
2. Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros.
3. Montrer qu'il existe $n \geq 1$, $(c_1, \cdots, c_n) \in D^n$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que :

$$f(z) = \alpha \prod_{1\leq j\leq n} \left(\frac{z - c_j}{1 - \bar{c_j} z}\right), \ \forall z \in \bar{D}.$$

Exercice 9. Soient $a > 0$, $b > 0$ deux réels. Trouver un chemin $t \longmapsto \gamma(t)$ dans $\mathbb{R}^2$ paramétrant l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Calculer de deux façons différentes l'intégrale $\int_\gamma \frac{dz}{z}$. En déduire l'égalité :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta} = \frac{2\pi}{ab}.$$

Exercice 10. Soit μ une mesure complexe finie sur un ensemble $D \subset \mathbb{C}$, et $\varphi : D \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable sur D. Soit Ω un ouvert qui ne rencontre pas $\varphi(D)$. Alors la fonction

$$f(z) = \int_D \frac{d\mu(\xi)}{\varphi(\xi) - z}$$

définie pour $z \in \Omega$ est holomorphe sur Ω. On montrera qu'elle est développable en série entière autour de chaque point $a \in \Omega$.

TD 5 : Fonctions méromorphes, Séries de Laurent, Théorèmes des résidus

Exercice 1. Soient a, b, c dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que $\log((z-a)/(z-b))$ admet une détermination dans $\mathbb{C}\backslash[a,b]$. Donner son développement en série de Laurent dans $|z| > \max\{|a|, |b|\}$.
2. Où la fonction $f(z) = \log(z-a)/(z-b) + \log(z-b)/(z-c) + \log(z-c)/(z-a)$ définit-elle une fonction holomorphe ? Montrer alors que f est localement constante. Déterminer les constantes.

Exercice 2. Soit g holomorphe au voisinage de a et $b = g(a)$. Soit f méromorphe ayant un pôle d'ordre m en b. Montrer $f \circ g$ a un pôle d'ordre mn en a, où n est l'ordre du zéro de $g(z) - b$ en a.

Exercice 3. Donner les 3 premiers termes du développement en série de Laurent au voisinage de 0 de :

$$f(z) = \frac{1}{z^2(e^z - e^{-z})}.$$

Exercice 4. Trouver les résidus des fonctions données aux pôles précisés:

1. $f(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$ en $z = 2$, $z = i$.
2. $g(z) = \frac{1}{z(z+2)^3}$ en $z = 0$, $z = -2$.
3. $h(z) = \text{cotan}(z)$ en $z = 3\pi$.

Exercice 5. Calculer l'intégrale des fonctions précédentes sur les chemins suivants respectivement

1. $|z| = 3/2$, $|z| = 15\pi$,
2. $|z| = 1$, $|z| = 3$,

Exercice 6. Soit γ_R le cercle de rayon R parcouru une fois dans le sens direct. Calculer pour $R \neq 1$:

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2 + z + 1}{z^4 + 1}\, dz.$$

Exercice 7. Calculer $\displaystyle\int_{|z+i|=3} \sin z \,\frac{dz}{z+i}$, $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$, puis $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{e^z}{z(1-z)}\, dz$,
pour les ouverts suivants $D = \{|z| < 1/2\}$, $\{|z| < 3/2\}$ et $\{|z-1| < 1/2\}$.

Exercice 8. Calculer $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{(z^2-1)(z-3)^2}$, $D = \{2 < |z| < 4\}$.

Exercice 9. Calculer $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^{\sin z+\cos z}}{1-\cos z}\, dz.$

Exercice 10. Soit $I = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt$, où $R(x,y)$ est une fonction rationnelle n'ayant pas de pôle sur le cercle unité $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$. Montrer que :

$$I = 2\pi \sum \text{Res}\left[\frac{1}{z} R(\frac{1}{2i}(z-1/z), \frac{1}{2}(z+1/z))\right].$$

Soit a un réel > 1. Vérifier que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Exercice 11. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$, $n \geq 2$, en utilisant l'union des chemins :

$$[0,R],\ \{Re^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi/n\},\ [Re^{2i\pi/n}, 0].$$

Exercice 12. Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et γ le bord orienté d'un compact $K \subset D$.

1. Soit f holomorphe dans D et ne s'annulant pas sur γ. Relier le nombre de zéros de f dans K, comptés avec multiplicité, à l'intégrale $\int_\gamma f'(z)/f(z)\, dz$.
2. Soient f et g holomorphes dans D, telles que $|f(z)| > |g(z)|$ sur γ. Montrer que le nombre de zéros de $f+g$ dans K est égal au nombre de zéros de f dans K (Théorème de Rouché).
3. Soit f holomorphe dans un ouvert contenant $|z| \leq 1$ et telle que $|f(z)| < 1$ si $|z| = 1$. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, l'équation $f(z) = z^n$ admet exactement n solutions dans $|z| < 1$.
4. Déterminer le nombre de racines de l'équation $z^3 - 12z + 3 = 0$ dans le disque fermé de centre 0 et de rayon 2.
5. Soit $\alpha > 1$. Montrer que l'équation $e^z + z - \alpha = 0$ n'admet qu'une seule racine dans le demi-plan Re $(z) > 0$ et que cette racine est réelle. (Appliquer le TRO à des demi-cercles de diam`tre $[-iR, iR]$).
6. Montrer que l'équation $z \sin z = 1$ n'a que des racines réelles. (Déterminer d'abord le nombre de racines de cette équation sur le segment $[-(2n+1)2\pi, (2n+1)2\pi]$ et le comparer avec le nombre de racines dans le carré $\sup(|x|,|y|) < (2n+1)\pi$ que l'on obtiendra par TRO.)

TD 6 : Résidus et Formules remarquables

On rappelle la proposition suivante:

Proposition *Soit $(u_n(z))_{n\geq 0}$ une suite de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ telles que:*

- *pour tout n, u_n n'est pas identiquement égale à la fonction -1,*
- *pour tout compact $K \subset \mathbb{C}$, la série $\sum u_n(z)$ converge normalement dans K.*

Posons $f(z) = \prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n(z))$. Alors

1. *La fonction $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ est bein définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$,*
2. *La fonction $f(z)$ est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$;*
3. *On a l'égalité, pour tout z tel que $f(z) \neq 0$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n'(z)}{1+u_n(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Exercice 1. Posons $\phi_1(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n\pi)^2}$.

1. Montrer que cette fonction ϕ_1 est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et trouver ses pôles.
2. Montrer que ces pôles sont tous d'ordre 2, et que le résidu de ϕ_1 en chacun de ses pôles vaut 0.
3. Montrer que la fonction $z \mapsto \frac{1}{(\sin(z))^2}$ a les mêmes propriétés que ϕ_1.
4. Montrer que la fonction g_1 définie par $g_1(z) = \frac{1}{(\sin(z))^2} - \varphi_1(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
5. En utilisant la π-périodicité de g_1, montrer que g_1 est bornée sur $\{z : Im(z) \geq \pi\}$, puis sur $\{z : Im(z) \geq \pi\}$, et enfin sur $\mathbb{C}$. En déduire de g_1 est constante.
6. Conclure que pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1}{(\sin(z))^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n\pi)^2}.$$

Exercice 2. Posons $\phi_2(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi}$.

1. Montrer que ce ϕ_2 est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et trouver ses pôles. Montrer que l'on peut écrire $\phi_2(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right)$.
2. Montrer que les pôles de ϕ_2 sont tous d'ordre 1 avec un résidu égal à 1.
3. Montrer que la fonction $z \mapsto \mathrm{cotan}(z)$ a les mêmes propriétés que ϕ_1.
4. Montrer que la fonction g_2 définie par $g_2(z) = \mathrm{cotan}(z) - \varphi_2(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
5. Par le même raisonnement qu'à l'exercice 1, montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\mathrm{cotan}(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi}.$$

6. Quelle est la relation entre ϕ_1 et ϕ_2?

Exercice 3. Posons, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{array}{rcl} u_0(z) & = & z-1, \\ \text{pour tout } n \geq 1, \quad u_n(z) & = & -\dfrac{z^2}{n^2\pi^2}. \end{array}$$

1. Montrer que la série $\sum u_n(z)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.
2. Posons pour tout $z \in \mathbb{C}$ $\phi_3(z) = \prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n(z))$. En appliquant la proposition du début de la feuille d'exercice. Montrer que pour tout z qui n'annule pas ϕ_3, on a
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n'(z)}{1+u_n(z)} = \frac{\phi_3'(z)}{\phi_3(z)}.$$
3. Montrer que
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n'(z)}{1+u_n(z)} \quad = \quad \phi_2(z).$$
4. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\phi_3(z) = \lambda \sin(z)$.
5. Montrer que $\lambda = 1$, et en déduire la formule
$$\text{pour tout } z \in \mathbb{C}, \qquad \sin(z) = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

TD 7 : Traitement du signal, Théorèmes d'échantillonnage

Préambule.
Il existe plusieurs façons de définir la transformation de Fourier (présence ou absence du "2π"). La définition utilisée dans ce TD est :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i2\pi\xi x} dx$$

Exercice 1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On note $\tau_a f(x) = f(x-a)$, $s_a f(x) = f(ax)$, $m_n f(x) = x^n f(x)$ pour $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $\widehat{\tau_a f}$, $\widehat{s_a f}$, $\widehat{m_n f}$ et $\widehat{\frac{d^n f}{dx^n}}$ en fonction de $\widehat{f}$ (à quel espace fonctionnel f appartient-elle?)
2. Si f et g sont L^1, calculer $\widehat{f * g}$.

Exercice 2. Donner les CNS sur $\widehat{f}$ pour que f soit paire, impaire, réelle ou imaginaire pure.

Exercice 3. Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^n \mathbf{1}_{[a,b]}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$;
2. $f(x) = \max(1 - |x|, 0)$;
3. $f(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c}$ pour $a, b, c \in \mathbb{R}$;
4. $f(x) = \cos(2\pi x) \mathbf{1}_{[-k/4,k/4]}(x)$, $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Vérifier le théorème de Paley-Wiener, lorsqu'il s'applique, aux fonctions de l'exercice précédent.

Exercice 5.

1. Montrer que si f est une fonction C^1 à support compact, alors
$$\lim_{|\xi| \to +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$
2. En utilisant un argument de densité, montrer que la limite précédente est encore valable si f appartient simplement à l'espace L^1 (Lemme de Riemann-Lebesgue).

Exercice 6. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est ni L^1, ni L^2, mais il est possible de définir $\widehat{f}(\xi) := \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{e^{-i2\pi\xi x}}{x} + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{e^{-i2\pi\xi x}}{x} dx$.

1. Montrer que la limite ci-dessus a un sens pour tout $\xi \neq 0$, et la calculer. On rappelle que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi$.
2. Montrer que cette définition de la transformation de Fourier de $1/x$ reste compatible avec les propriétés vues en Exercice 2.

Exercice 7. Est-il possible que f et $\widehat{f}$ soient toutes deux à support compact (pour f dans quel espace fonctionnel?)?

Exercice 8. Soient $T > 0$ et $f \in L^1$ une fonction dont on connait les échantillons $f(kT)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

1. Que doit valoir au minimum a pour que la condition $\mathrm{supp}(\widehat{f}) \subset [-a, a]$ garantisse une reconstruction parfaite de f à partir des échantillons ?
2. Que se passe-t-il si $\mathrm{supp}(\widehat{f})$ est trop grand, et comment y remédier ?