L3 Mathématiques 2005-2006
Probabilités
1. Espace de probabilité, variables aléatoires: cas fini ou dénombrable

Tribu et événements

1. Montrer qu'une tribu est stable par intersection dénombrable, par réunion finie, par intersection finie.

2. Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable, et soit $A, B \in \mathcal{F}$. Montrer que $A \backslash B$ et $A \Delta B$ sont dans $\mathcal{F}$.

3. a) Montrer que l'intersection d'un nombre quelconque de tribus est une tribu; en déduire qu'il existe une seule tribu, minimale pour l'inclusion, dans l'ensemble des tribus contenant un sous-ensemble donné $\mathcal{E}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$. Cette tribu est appelée *tribu engendrée* par la famille $\mathcal{E}$ de parties de Ω et est notée $\sigma(\mathcal{E})$.

b) La réunion de deux tribus est-elle toujours une tribu?

c) Soit $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$. Déterminer la tribu $\sigma(\{A,B,C\})$ où $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$ et $C = \emptyset$.

4. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On considère une suite d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ et on note

$$\liminf_n A_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} A_m, \ \limsup_n A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} A_m.$$

a) Montrer que $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ sont dans $\mathcal{A}$, et que $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$.

b) Trouver une autre expression pour $(\liminf_n A_n)^c$ et $(\limsup_n A_n)^c$.

c) On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$. Montrer que si la suite est croissante (respectivement décroissante) alors elle est convergente et

$$\lim_n A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ (respectivement } \lim_n A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n).$$

5. On considère sur $\mathbb{R}$ la tribu $\mathcal{A}$ engendrée par les singletons. Montrer que cette tribu coïncide avec la tribu (en est-ce bien une?)

$$\mathcal{B} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ ou } A^c \text{ soit au plus dénombrable}\}.$$

Probabilité

6. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 3/4$ et $\mathbb{P}(B) = 1/3$. Montrer que $1/12 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq 1/3$ et donner deux exemples où ces bornes sont atteintes. Encadrer de même $\mathbb{P}(A \cup B)$.

7. Soit $\Omega = \{a,b,c\}$. Combien de probabilités peut-on définir sur Ω telles que
a) $\mathbb{P}(\{a,b\}) = 1/4$?
b) $\mathbb{P}(\{a,b\}) = \mathbb{P}(\{b,c\}) = 1/4$?
c) $\mathbb{P}(\{a,b\}) = \mathbb{P}(\{b,c\}) = 3/4$?

8. Peut-on définir une probabilité uniforme sur $\mathbb{N}$ muni de la tribu de toutes ses parties?

9. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

a) Formule d'inclusion-exclusion. Montrer par récurrence que si $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements, alors pour tout $n \geq 2$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leq j\leq n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + ...$$
$$+(-1)^{n-1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leq j\leq n} A_j\right).$$

b) Problème des chapeaux. n messieurs ont accroché leur chapeau au porte-chapeau en entrant. En repartant, chacun prend un chapeau au hasard. Quelle est la probabilité qu'au moins un d'entre eux reparte avec son chapeau?

10. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, \infty[$ une application additive (c'est-à-dire $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$, lorsque $A, B \in \mathcal{A}$ et $A \cap B = \emptyset$), telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Montrer que les trois affirmations suivantes sont équivalentes:
(i) $\mathbb{P}$ est une probabilité (c'est-á-dire elle est σ-additive, i.e. pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ d'évenements 2 à 2 disjoints, on a $P[\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n] = \sum_{n\in\mathbb{N}} P[A_n]$);
(ii) $\mathbb{P}$ est continue sur des suites croissantes :

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A},\ A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

(on notera pour des telles suites croissantes $\lim_n A_n := \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$);
(iii) $\mathbb{P}$ est continue sur des suites décroissantes :

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A},\ A_n \supset A_{n+1} \Rightarrow \mathbb{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

(on notera pour des telles suites décroissantes $\lim_n A_n := \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$);

11. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On considère une suite d'ensembles mesurables $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$. Montrer que: $\mathbb{P}(\liminf_n A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup_n A_n)$. Montrer que si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente on a la propriété de continuité: $\mathbb{P}(\lim_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Mesurabilité, variables aléatoires discrètes, moments

12. Soit X une fonction de l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ dans l'espace mesurable $(E, \mathcal{B})$. Montrer que $\mathcal{A}' = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ et $\mathcal{B}' = \{B : X^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ sont des tribus mais que $X(\mathcal{A}) = \{X(A) : A \in \mathcal{A}\}$ n'est pas une tribu en général.

13. On joue indéfiniment à Pile ou Face avec une pièce qui tombe sur pile avec probabilité p. Soit X_n le nombre de piles obtenus au cours des n premiers lancers. Trouver la loi de X_n. Que représente $Y = \inf\{n \geq 1, X_n > 0\}$? Trouver la loi de Y.

14. Deux joueurs A et B jouent à un jeu d'argent. A gagne avec probabilité p, $0 < p < 1$, et il mise une somme de s, tandis que B gagne avec une probabilité $1 - p$, en misant une somme s'. Le vainqueur empoche le total des enjeux. Trouver une condition portant sur p, s, s' pour que le jeu soit équitable.

15. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k)$.

16. Déterminer les variables aléatoires réelles discrètes telles que
a) $\mathbb{E}|X| = 0$.
b) $\text{Var}(X) = 0$.

17. Calculer espérance et variance pour les lois discrètes classiques (uniforme, Bernoulli, Binômiale, géométrique et Poisson).

18. Soit X un variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p.
a) Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right)$.
b) Montrer que pour $r \geq 2$, $\mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \frac{r!p^r}{(1-p)^r}$.

19. Soit X un variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ.
Montrer que pour $r \geq 2$, $\mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \lambda^r$.

20. On pose $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{a}{k^\alpha}$.
Déterminer les valeurs de α pour qu'une telle loi existe. Que doit valoir a? Discuter l'existence de $E[X]$.

21. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-2}}{4}\frac{2^k}{k!}(1 + ak), \ \ \forall k \in \mathbb{N},$$

pour une unique valeur de a que l'on déterminera.

22. Soit Y une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On lui associe la variable aléatoire

$$Z := \begin{cases} \frac{Y}{2}, & \text{si } Y \text{ est pair,} \\ \\ \frac{1-Y}{2}, & \text{si } Y \text{ est impair.} \end{cases}$$

Trouver les valeurs possibles pour Z ainsi que sa loi.

23. Soit T une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On considère $U = 4[T/2] - 2T + 1$, où $[\cdot]$ désigne la partie entière. Trouver la loi de U.

24. **(i)** Une personne a n clés dans sa poche et veut ouvrir sa porte dans l'obscurité. Elle prend au hasard les clés les unes après les autres et les essaie. On note X le nombre de clés qu'elle essaie avant de trouver la bonne. En supposant qu'une clé une fois essayée est ensuite mise de côté, quelle est la probabilité que cette personne tire la bonne clé à la k-ème tentative? Quelle est la loi de X, son espérance, sa variance?
(ii) Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On extrait ces boules de l'urne les unes après les autres, au hasard et sans remise, et on note R_k le numéro porté par la k-ème boule tirée de l'urne. Donner la loi de R_k, son espérance et sa variance.

25. Soit Y une variable aléatoire uniforme sur $\{a, a+1, \dots, b\}$. A partir des expressions de l'espérance et de la variance de la loi $\mathcal{U}(1, 2, \dots, r)$ déduire $\mathbb{E}(Y)$ et $\text{Var}(Y)$.

26. Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.
(i) On note $Y = \inf\{X, n\}$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.
(ii) Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules noires. On tire succesivement et avec remise à chaque fois une boule de l'urne et on cesse les tirages dès qu'une boule rouge est sortie. On désigne par X le nombre de boules noires obtenues pendant l'expérience. Calculer la loi de X, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Simulation des variables aléatoires discrètes

On suppose que la machine a une fonction `random` qui simule un tirage de loi uniforme sur $[0, 1]$.

27. Donner un algorithme de simulation d'une loi de Bernoulli de paramètre p.

28. Donner un algorithme de simulation d'une loi uniforme sur $\{1, 2, ..., n\}$.

29. Donner un algorithme de simulation d'une loi quelconque sur $\{1, 2, ..., n\}$.

L3 de Mathématiques 2005-2006
Probabilités
2. Espace de probabilité, variables aléatoires: le cas réel

Tribu borélienne et autres

30. Montrer que, sur $\mathbb{R}$, la tribu engendrée par les parties fermées est égale à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

31. (*) Montrer que la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ coïncide avec la tribu engendrée par les intervalles $]a,b[$ ou par les intervalles $]-\infty,b]$, où $-\infty < a < b < \infty$. Même question lorsqu'on suppose seulement $a,b \in \mathbb{Q}$, $a < b$.

32. Montrer que les singletons sont dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Montrer que sur $\mathbb{R}$, la tribu borélienne est strictement plus grosse que la tribu engendrée par les singletons.

33. Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω, et soit B un élément de $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{A}_{|B} = \{A \cap B,\ A \in \mathcal{A}\}$. Montrer que $\mathcal{A}_{|B}$ est une tribu sur B. Est-ce encore vrai si B n'est pas dans $\mathcal{A}$?
(*) Montrer que $\mathcal{B}([0,1]) = \mathcal{B}(\mathbb{R})_{|[0,1]}$.

34. On dit qu'un événement $A \in \mathcal{A}$ est presque sûr si $P(A) = 1$. Soit $(A_j)_{j\in J}$, $J \subset \mathbb{N}$, une famille d'événements presque sûrs. Montrer que $\cap_{j\in J} A_j$ est presque sûr.

Variable aléatoire réelle et loi de probabilité sur $\mathbb{R}$

35. Soit X une application d'un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que X est mesurable si et seulement si $\forall a \in \mathbb{R},\ \{X \leq a\} \in \mathcal{F}$.

36. Soit μ une probabilité qui admet une densité f sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mu(\{x\}) = 0$.
2. Montrer que si D est un ensemble fini ou dénombrable, $\mu(D) = 0$.

37. Montrer qu'une application $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ est une variable aléatoire par rapport à la tribu triviale (sur Ω) si et seulement si elle est constante.

38. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de variables aléatoires réelles définies sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$. Montrer que $\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $\limsup_{n\to\infty} X_n$ et $\liminf_{n\to\infty} X_n$ sont des variables aléatoires. En déduire que l'ensemble

$$\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \text{ existe } \}$$

est un événement (c'est-à-dire est un élément de $\mathcal{F}$).

Variable aléatoire réelle à densité

39. Soit $f(x) = \dfrac{c}{(1+x)^2}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$.
Calculer c pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X. Calculer sa fonction de répartition. En déduire $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2)$.

40. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X dont la fonction de répartition vaut

$$F(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}, \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

La variable aléatoire X admet-elle une densite? Si oui, la calculer. On pose $Y = e^X$, $Z = X\mathbf{1}_{\{0<X<1\}}$ et $U = \mathbf{1}_{\{0<X<1\}}$. Trouver les lois de Y, Z et U.

On pourra calculer les fonction de répartition correspondantes.

41. i) La durée T d'une communication téléphonique est une variable aléatoire de fonction de répartition

$$F(t) = (1 - e^{-\lambda t})\mathbf{1}_{[0,\infty[}(t), \ \ \text{où } \lambda > 0.$$

Calculer, pour $a, b > 0$, $\mathbb{P}(T < 0)$, $\mathbb{P}(a \leq T)$, $\mathbb{P}(a \leq T \leq b)$. T possède-t-elle une densité?
ii) Montrer que $\forall s, t > 0$, $\mathbb{P}(T > s + t | T > s) = \mathbb{P}(T > t)$.
iii) Trouver toutes les lois qui vérifient cette propriété.

42. i) Soit $X \sim \mathcal{U}_{[-2,1]}$ et $Y = |X|$. Trouver la fonction de répartition et la densité de Y.
ii) Montrer que si X admet une densité, alors $|X|$ en admet une aussi et la calculer.

43. Quelle est la densité de la variable aléatoire $Y = aX + b$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, lorsque la densité de la variable aléatoire réelle X est f? En déduire que si $X \sim N(0, 1)$, alors $Y = m+\sigma X \sim N(m, \sigma^2)$.

44. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2/2)dx = \sqrt{2\pi}$, puis utiliser le résultat pour vérifier que la densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ est bien une densité.

45. (*) Soit $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$.
i) Vérifier que, pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_x^{\infty} e^{-t^2/2}(1 + 1/t^2)dt$.
ii) En déduire, pour $x > 0$, $1 - \Phi(x) \leq \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.
iii) Prouver que $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_x^{\infty} e^{-t^2/2} \left(1 - \dfrac{3}{t^4}\right) dt$.
En déduire que, pour $x > 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2} \leq 1 - \Phi(x) \leq \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.
iv) Prouver que $1 - \Phi(x) \sim \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, lorsque $x \uparrow \infty$.

Fonction de répartition

46. (*) Soit X une v.a à valeurs dans $[0, 1]$, de fonction de répartition F continue et strictement croissante. Montrer que $F(X)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

47. Calculer explicitement la fonction inverse G de la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que si $U \sim U[0, 1]$, $G(U)$ suit une loi exponentielle de paramètre λ. En déduire un algorithme de simulation d'une loi exponentielle.

48. On appelle loi de Cauchy la loi de densité $\dfrac{C}{1+x^2}$. Déterminer C. Calculer explicitement la fonction inverse de la fonction de répartition d'une loi de Cauchy. En déduire un algorithme de simulation d'une loi de Cauchy.

49. Soit X une v.a. dont la fonction de répartition F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Justifier l'existence de F^{-1} et montrer que, si U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$, alors $F^{-1}(U)$ a même loi que X. En déduire un procédé de simulation de X.

3. Intégration par rapport à une probabilité

Calculs de moments

50. Calculer l'espérance et la variance pour les lois de probabilités à densité usuelles. (exponentielles, uniforme, gaussiennes)

51. Soit X une variable aléatoire réelle de densité $f_X(x) = c\left[x\mathbf{1}_{[0,1]}(x) + (2-x)\mathbf{1}_{[1,2]}(x)\right]$. Calculer c, $\mathbb{E}(X^n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{Var}(X)$.

52. Soit X une va de Cauchy de densité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Montrer que X n'est pas intégrable.

53. **(i)** Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Etudier l'existence des moments de X, et les calculer quand ils existent.
(ii) Soit Y une variable aléatoire de densité $f_Y(x) = \dfrac{p}{x^{p+1}}\mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)$, $p \geq 1$.
Montrer que $Y \in \mathrm{L}^r$, pour $r < p$ et que $Y \notin \mathrm{L}^p$.
(iii*) Construire une variable Z telle que $Y \in \mathrm{L}^p$ et $Y \notin \mathrm{L}^r$, pour tout $r > p$.

54. Soit X une v.a. de densité

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\cos(x)\mathbf{1}_{x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$$

Calculer l'espérance et la variance de $Y = \sin X$, $Y' = |Y|$ et $Z = |X|$.

55. **(i)** Soit $\alpha > 0$. Montrer que la fonction $x \mapsto x^{\alpha-1}e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On note $\Gamma(\alpha)$ son intégrale. Montrer que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
(ii) On dit que X suit une loi gamma standard de paramètre α si elle a pour densité

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

Montrer que $\mathbb{E}(X^k) = \dfrac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$. En déduire la moyenne et la variance de X.
(iii) Calculer $\Gamma(1)$, et en déduire $\Gamma(n)$ pour tout $n \geq 1$.

Calculs de lois

56. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et on note $Y = X^2$. Trouver la loi de Y et calculer son espérance.
On pose $Z = |X|$, trouver la loi de Z, calculer sa moyenne et sa variance.

57. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et on note $Y = \sigma X + m$, avec $\sigma > 0$ et $m \in \mathbb{R}$. Trouver la loi de Y et calculer son espérance espérance et sa variance.

58. Soit $X \sim \mathcal{E}xp(1)$, et on pose $Y = \lambda X$. Déterminer la loi de Y.

59. Robin des Bois s'entraîne au tir à l'arc. On suppose que la distance R entre sa flèche et le centre de la cible suit une loi de Rayleigh, de densité (où $h > 0$ est un paramètre fixé):

$$f_R(r) = Ar\exp(-h^2r^2)\mathbf{1}_{r>0}.$$

1. Exprimer A en fonction de h.
2. Calculer le mode M de R, c'est-à-dire l'abscisse de sa densité maximale. Donner l'allure de la densité de R.
3. Calculer la moyenne et la variance de R. Donner une interprétation de h.
4. Robin touche la cible (qui est de rayon 1) dans 95% des cas. Calculer h.
5. On pose $T = \exp(-R^2)$. Calculer la loi de T.
6. Soit S la surface d'un disque (aléatoire) de rayon R. Trouver la loi de S, calculer sa moyenne et sa variance.

60. Si X suit une loi uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, quelle est la loi de $Y = \sin(X)$?

Exercices plus théoriques

61. Soit X une variable aléatoire réelle admettant pour densité f_X et soit $a > 0$. Montrer que $Y = aX$ est une variable aléatoire réelle admettant pour densité $f_Y(x) = \frac{1}{a}f_X(\frac{x}{a})$.

62. Soit f une densité sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} |x|f(x)dx$ soit finie.

1. On suppose de plus que $f(x) = f(-x)$ pour tout x réel. Montrer que la moyenne d'une v.a. de densité f est nulle.
2. On suppose maintenant qu'il existe m avec $f(m+x) = f(m-x)$ pour tout x réel. Montrer que la moyenne d'une v.a. de densité f est égale à m.

63. Soit X une va réelle de moyenne μ et de variance σ^2 finies. Montrer que

$$\forall a > 0,\ \mathbb{P}(|X - \mu| \geq a\sigma) \leq \frac{1}{a^2}.$$

64. Montrer que $\text{Var}X = 0 \Leftrightarrow X = \mathbb{E}X \quad p.s.$

65. **(i)** Soient X, Y deux variables aléatoires réelles de même loi appartenant à $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que si $X \geq Y$ p.s. alors X et Y sont presque sûrement égales.
(ii*) Même question si on ne suppose pas X et Y integrables.

66. (*) **(i)** Soit X une v.a. réelle appartenant à $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que

$$\lim_{M\to+\infty} \mathbb{E}(|X|\mathbf{1}_{\{|X|\geq M\}}) = 0.$$

(ii) Soit X une v.a. réelle appartenant à $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall A \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}(A) \leq \eta \Rightarrow \mathbb{E}(|X|\mathbf{1}_A) \leq \varepsilon.$$

L3 de Mathémathiques 2005-2006
Probabilités
4. Vecteurs aléatoires

Vecteur aléatoire discret

67. On joue n fois au Pile ou face avec une pièce qui tombe sur Pile avec probabilité p. Soit X (resp. Y) le nombre de Piles (resp. Faces) obtenus. Calculer la loi de (X, Y), puis Cov (X, Y).

68. Soient $n \geq 1$ un entier fixé et p_1, p_2, p_3 trois réels positifs tels que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. On note:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j}, & \text{si } i + j \leq n, \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$

(i) Montrer qu'il existe un couple (X, Y) tel que $\mathrm{P}(X = i, Y = j) = p_{ij}$.
(ii) Trouver les lois de X et de Y.
(iii) Donner une interprétation de cette loi.

69. Une urne contient r boules dont 2 rouges et $r - 2$ noires. On effectue r tirages sans remise et on note X le rang du premier tirage d'une boule rouge et Y le rang du second tirage.
(i) Trouver la loi de (X, Y) et de ses marginales.
(ii) Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

70. Une urne contient b boules blanches et r rouges; une boule étant tirée, on la remet et avec elle encore c boules de la couleur tirée. On pose $p = \frac{b}{b+r}$, $q = 1 - p$, $\gamma = \frac{c}{b+r}$. On note

$$X_n = \mathbb{1}_{\{\text{la } n\text{-ème boule tirée est blanche}\}}$$

et $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.
(i) Trouver les lois de X_1 et X_2 en fonction de p, q, γ.
(ii) Exprimer le coefficient de corrélation de X_1 et X_2 en fonction de p, q, γ.
(iii) Trouver la loi conditionnelle de X_n sachant $S_{n-1} = k$.
(iv) Exprimer la loi de X_n en fonction de p, q, γ et $\mathbb{E}(S_{n-1})$. En déduire la loi de X_n par récurrence.

Vecteur aléatoire à densité

71. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) dxdy = 2\pi\sigma^2.$$

En déduire que $f(x, y) = \dfrac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\dfrac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$ est la densité d'un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^2$.

72. Le couple aléatoire (X, Y) a la densité, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = cy\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y).$$

Calculer c et trouver les densités marginales de X et de Y.

73. Même exercice avec $g(x, y) = c(x + 3y)e^{-x-2y}\mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)\mathbb{1}_{[0,\infty[}(y)$.

74. On pose $f(x, y) = \dfrac{c}{2\pi} \exp\left[-\dfrac{1}{2}(3x^2 - 3xy + y^2)\right]$.
(i) Déterminer c pour que f soit la densité d'un couple aléatoire (X, Y).
(ii) Trouver les lois marginales, le vecteur espérance et la matrice de covariance de (X, Y).

75. Soit la fonction
$$f(x,y) = \frac{1 + xy(x^2 - y^2)}{4} \mathbb{1}_{[-1,1]\times[-1,1]}(x,y).$$
(i) Montrer qu'il existe un couple aléatoire (X, Y) à valeurs p.s. dans $[-1, 1]$ de densité f.
(ii) Trouver les lois marginales de (X, Y). Quelle est la matrice de covariance de (X, Y)?

76. Le couple aléatoire (X, Y) de loi uniforme sur le disque unité $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Déterminer la densité f de ce vecteur.
(i) Calculer $\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbb{P}(Y \geq \frac{1}{\sqrt{2}})$, puis $\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, Y \geq \frac{1}{\sqrt{2}})$.
(ii) Calculer $\mathbb{P}(X \geq Y)$ et $\mathbb{P}(X \geq \lambda Y)$.
(iii) Trouver les marginales de X et de Y. Calculer leur covariance.
(iv) Soient a, b deux réels égaux à ± 1. Montrer que (X, Y) a la même loi que (aX, bY). Montrer que (X, Y) a la même loi que (Y, X).
(v) On note (R, Θ) les coordonnées polaires de (X, Y). Trouver la loi du couple (R, Θ) et ses marginales.

77. On jette un point D au hasard sur le cercle centré en $O' = (\frac{1}{2}, 0)$ de rayon $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, que pour tout arc $\mathcal{A}$, $\mathbb{P}(D \in \mathcal{A})$ est proportionnel à la longueur de $\mathcal{A}$. On note aussi le point $C = (1, 0)$.
(i) Calculer le coefficient de proportionnalité. On note Θ la mesure de l'angle $(\widehat{O'C, O'D})$ qui appartient à $]-\pi, \pi]$. Quelle est la loi de Θ?
(ii) On pose $D = (X, Y)$. Trouver la loi de X (loi arcsinus).

78. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^2$, de densité f. Déterminer la loi de $X + Y$.

79. Soit le couple aléatoire (X, Y). On note $\varphi(x, y) = f(x)g(y)$, avec f, g boréliennes positives. Quelles hypothèses doivent vérifier f et g pour que φ puisse être la densité du couple (X, Y)? Calculer alors les densités marginales de X et Y.

80. Soit X une variable aléatoire réelle L^2, et soit $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Déterminer la covariance de X et $aX + b$.

L3 de Mathématiques 2005-2006
Probabilités
5. Indépendance

Probabilité conditionnelle et indépendance d'événements

81. On dit que A favorise B si $\mathbb{P}(B|A) \geq \mathbb{P}(B)$. Montrer que si A favorise B alors B favorise A. Est-il vrai que si A favorise B et B favorise C alors A favorise C?

82. Deux usines (I et II) fabriquent des trottinettes. Le taux de fabriquation d'objets défectueux est de 20% pour l'usine I et de 5% pour l'usine II. L'usine I fabrique deux fois plus de trottinettes que l'usine II.

a) Quelle est la probabilité d'acheter une trottinette cassée ?

b) Quelle est la probabilité qu'une trottinette provienne de l'usine I sachant qu'elle est cassée?

83. (Marche au hasard) Dans ma rue, les maisons sont toutes du même coté et numérotées de 0 à n. J'habite au numéro n, il y a un bar au numéro 0, et mon travail se situe au numéro k. Quand je sors du travail, je réalise une marche aléatoire: je lance une pièce qui tombe sur 'pile' avec probabilité $p \in]0,1[$, si 'pile' sort j'avance jusqu'au numéro suivant, sinon je recule jusqu'au numéro précédent; je recommence jusqu'à ce que j'arrive soit chez moi, soit au bar.

Notons p_k la probabilité que partant de k j'arrive à la maison avant d'arriver au bar, pour $0 \leq k \leq n$. Montrer que $(p_k)_{0 \leq k \leq n}$ satisfait une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, et que $p_0 = 0$ et $p_n = 1$. En déduire la valeur de p_k.

84. (Urnes de Polya) Dans une urne, il y a n boules noires et r boules rouges. Je pioche une boule au hasard, je note sa couleur, puis je la remets dans l'urne en ajoutant d boules de la même couleur. Puis je recommence le même procédé.

1. Quelle est la probabilité que la seconde boule piochée soit noire?
2. Quelle est la probabilité que la première boule piochée soit noire, sachant que la seconde boule piochée est noire?
3. Notons B_m l'événement "la m-ième boule piochée est noire." Montrer que $\mathbb{P}(B_m)$ ne dépend pas de m.
4. Quelle est la probabilité que la première boule piochée soit noire, sachant que les $m-1$ suivantes sont noires?

85. On dispose de deux pièces de monnaie. La première a une probabilité $\frac{1}{4}$ de donner pile et la deuxième a une probabilité $\frac{1}{2}$ de donner pile. On choisit au hasard une pièce et on effectue une série de lancers avec la règle suivante: si au n-ème lancer la pièce donne pile (respectivement face) on effectue le lancer suivant avec la même pièce (respectivement avec l'autre pièce). On note α_n la probabilité de lancer la première pièce au n-ème jet. Montrer que α_n satisfait à une relation du type $\alpha_{n+1} = a\alpha_n + b$. En déduire la valeur de α_n.

Variables aléatoires indépendantes

86. Pour les vecteurs aléatoires de la feuille 4, dire si les coordonnées sont indépendantes ou non.

87. Méthode de Box-Mueller pour simuler des va gaussiennes.
(i) Soit X et Y deux va de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ indépendantes. On pose $T = X^2 + Y^2$, $Z = \sqrt{X^2+Y^2}$ et $W = \arctan(X/Y) \in]-\pi/2, \pi/2]$. Détermine r la loi de T et celle de (Z,W). NB: la loi de Z s'appelle loi de Rayleigh.
(ii) Soit U_1 et U_2 deux va de loi uniforme sur $]0,1[$ indépendantes. On pose $\theta = 2\pi U_1$ et $S = -\log U_2$.

(a) Déterminer la loi de θ et S. Sont-elles indépendantes? Montrer que $R = \sqrt{2S}$ suit une loi de Rayleigh.

(b) On pose $X = R\cos\theta$ et $Y = R\sin\theta$. Montrer que X et Y sont deux va indépendantes de loi normale.

88. Soit les variables aléatoires indépendantes X, Y de même loi $\mathcal{U}(1,2,\ldots,n)$.
(i) Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$.
(ii) Trouver la loi de $X+Y$.
(iii) On pose $U = \min\{X,Y\}$ et $V = \max\{X,Y\}$. Trouver les lois de (U,V), U et V.
(iv) U et V sont-elles indépendantes?

89. Soit les variables aléatoires indépendantes X, Y de même loi $\mathcal{G}(p)$, $0 < p < 1$. On pose $U = \min\{X,Y\}$ et $V = \max\{X,Y\} - U$. Trouver les lois de U et V et étudier leur indépendance.

90. Deux personnes ont rendez-vous à 14h00 mais elles sont peu ponctuelles: les instants X et Y de leur arrivées sont deux variables aléatoires indépendantes uniformément répartis dans [14,15]. Calculer la loi de la variable T durée d'attente du premier arrivé.

91. Soit X et Y deux v.a. indépendantes de lois exponentielles de paramètre $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Trouver la loi de $Z = \min(X,Y)$. On pourra tenter de caluler $P[Z \geq x]$.

92. Soient $X_1,\ldots,X_n$ variables aléatoires réelles indépendantes de même loi. On note $U = \min_{1\leq j\leq n} X_j$ et $V = \max_{1\leq j\leq n} X_j$.
(i) Calculer les fonction de répartition de U et V à l'aide de la fonction de répartition commune des X_j.
(ii) Si la loi commune des X_j admet une densité, montrer que U et V admettent des densités et les calculer.

93. Soient X,Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$.
(i) Trouver la loi de $X+Y$, son espérance et sa variance.
(ii) Soit Z une variable aléatoire de même loi que $X+Y$. Calculer la loi de $1-Y$ et déduire que $X-Y$ a la même loi que $Z-1$. Quelle est la densité de $X-Y$?
(iii) Les variables $X+Y$ et $X-Y$ sont-elles indépendantes?

94. Soient X,Y deux variables aléatoires indépendantes dont les densités sont

$$f_X(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}\mathbb{1}_{[0,1[}(x),\ f_Y(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}\mathbb{1}_{]0,\infty[}.$$

Trouver la loi de XY.

L3 de Mathématiques 2005-2006
Probabilités
6. Fonctions caractéristiques et sommes de vai.

95. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que si elles sont indépendantes, alors $\varphi_{X+Y} = \varphi_X.\varphi_Y$.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des vaiid, on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Calculer φ_{S_n} en fonction de φ_{X_1}.

96. Calculer la fonction caractéristique d'une loi géométrique, d'une loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$, d'une loi de Poisson.

97. Montrer que si $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sont des vaiid de loi de Bernoulli de paramètre p, alors $S = \sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi binômiale de paramètres (n, p).

98. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, telles que X suit une loi de Poisson de paramètre λ et Y une loi de Poisson de paramètre μ. Déterminer la loi de $X + Y$.

99. Soit $X \sim Bin(n, p)$ et $Y \sim Bin(m, p)$ indépendantes. Déterminer la loi de $X + Y$ et commenter.

100. Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\lambda, \tau^2)$ indépendantes. Déterminer la loi de $X + Y$.

101. (i) Montrer que, si X est une va réelle, alors $\varphi_X(-\xi) = \overline{\varphi_X(\xi)}$.
(ii) Montrer que φ_X est à valeurs rélles si et seulement si la loi de X est symétrique, c'est-à-dire si et seulement si X et $-X$ ont même loi.
(iii) Montrer que si φ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle, alors sa partie réelle et son module au carré le sont aussi.

102. (gaussiennes) Soit X une va de loi normale centrée réduite. Calculer $f(\lambda) = \mathbb{E}(\exp(-\lambda X))$. Pour quelles valeurs de λ cette fonction est-elle définie?
Calculer la fonction caractéristique φ d'une loi normale centrée réduite en utilisant le théorème de prolongement analytique.
Calculer la fonction caractéristique φ d'une loi normale quelconque.
Soit X une va de loi normale centrée réduite. Montrer que ses moments d'ordre impair sont nuls et que

$$\mathbb{E}(X^{2n}) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

On pourra soit raisonner par récurrence soit utiliser le lien entre la fonction caractéristique et les moments de la variable aléatoire.

103. (exponentielle) Soit X une va de loi exponentielle de paramètre λ. Déterminer sa fonction caractéristique φ en établissant une équation fonctionnelle pour φ.

104. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des vaiid réelles et N une va indépendante des $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que toutes ces variables aléatoires sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
(i) Montrer que $S = \sum_{i=1}^N X_i$ est une variable aléatoire réelle.
(ii) On suppose que X_1 et N sont intégrables. Montrer que S est intégrable et calculer son espérance en fonction de celles de X_1 et N.
(iii) Calculer la fonction caractéristique de S en fonction de celles de X_1 et N.
(iv) On modélise le nombre de têtard d'une grenouille de la façon suivante: une grenouille pond un nombre N d'oeufs, où N suit une loi de Poisson. Chaque œuf a, indépendamment de tout le reste, une probabilité $p \in]0, 1[$ de donner un têtard. Calculer la loi du nombre de têtards obtenus

par cette grenouille.

105. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi.
(i) Montrer que si X et Y sont deux variables gaussiennes centrées réduites, alors $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes.
(ii) *Théorème de Bernstein.* Réciproquement, on suppose que X et Y sont de carré intégrable et que $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes. On veut montrer que X et Y sont deux variables gaussiennes. Pour cela :
(a) Montrer qu'on peut supposer que X et Y sont centrées, de variance 1.
(b) Montrer que φ, la fonction caractéristique commune de X et de Y, satisfait l'égalité $\varphi(2\xi) = \varphi(\xi)^3\varphi(-\xi)$. En déduire que φ ne s'annule nulle part.
(c) On pose $\psi(\xi) := \varphi(\xi)/\varphi(-\xi)$. Montrer que $\psi(2\xi) = \psi(\xi)^2$ et que $\psi(\xi) = 1 + o(\xi^2)$, lorsque $\xi \downarrow 0$. En déduire que, pour tout ξ, $\psi(\xi) = 1$ et que $\varphi(\xi) = \varphi(\xi/2)^4$. Conclure.

7. Convergence de variables aléatoires.

Convergences p.s., L^1, et en probabilité

106. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. admettant un moment d'ordre 2. Supposons que $\lim_n E[X_n] = c$ et $\lim_n \text{Var } X_n = 0$. Montrer que X_n converge en probabilité vers c. (Et dans L^2?).

107. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de v.a. convergeant en probabilité vers X et Y. Soit $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer que $g(X_n, Y_n)$ converge en probabilité vers $g(X, Y)$.

108. Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. admettant un moment d'ordre 2, montrer que $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \max\{X_1, ..., X_n\}$ converge en probabilité vers 0.

109. Montrer que si X_n converge vers X dans L^1, alors $E[X_n]$ tend vers $E[X]$.

110. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a réelles telles que pour un certain $A > 0$, on ait $|X_n| \leq A$ pour tout n. Montrer que X_n tend vers 0 en probabilit{e si et seulement si X_n tend vers 0 dans L^1.

111. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a réelles convergeant en probabilité vers X, et $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Montrer que $g(X_n)$ tend vers $g(X)$ dans L^1.

Convergence en loi

112. Soit, pour chaque n, X_n une v.a. de loi $B(n, \lambda/n)$. Montrer que X_n converge en loi vers une v.a. dont on déterminera la loi.

113. Soit, pour chaque n, X_n une v.a. de loi uniforme sur $\{1, 2, ..., n\}$. Montrer que X_n/n converge en loi vers une v.a. dont on déterminera la loi.

114. Soit, pour chaque n, X_n une v.a. de loi géométrique de paramétre p/n. Montrer que X_n/n converge en loi vers une v.a. dont on déterminera la loi.

115. (i) Si X_n converge en loi vers X et Y_n vers une constante c, montrer que $X_n + Y_n$ tend en loi vers $X + c$.
(ii) Si X_n converge en loi vers X et Y_n vers Y, peut on en d{eduire que $X_n + Y_n$ tend en loi vers $X + Y$?

116. Soit, pour chaque n, X_n une v.a. de loi $N(m_n, \sigma_n^2)$.
(i) Montrer que si $\lim_n m_n = m$ et $\lim \sigma_n^2 = \sigma^2 > 0$, alors X_n converge en loi vers X de loi $N(m, \sigma^2)$.
(ii) Montrer que si $\lim_n m_n = m$ et $\lim \sigma_n^2 = 0$, alors X_n converge en loi vers m (de loi δ_m).

LGN et TCL

117. Soit $\{X_n\}$ une suite de v.a. telles que $E[X_n] = 0$, $E[X_n X_m] = 0$ pour tout $n \neq m$, et $\sup_n E[|X_n^2|] < \infty$. Montrer que $\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ tend vers 0 dans L^2.

118. Le trajet Nancy-Epinal dure théoriquement 60 minutes.
La durée D en minutes du trajet Nancy-Epinal peut être modélisée comme

$$D = 60 + 2X + 30Z$$

où X suit une loi $N(0,1)$ et où Z vaut 1 avec probabilité 0.1 et 0 avec probabilité 0.9. Bien sûr, X et Z sont supposées indépendantes.
Soit $Y = D - 60$.
a) Que repréntent 60, $2X$ et $30Z$? Et Y?
b) Calculer $P(Y \geq 5)$ approximativement.
c) Calculer $E[Y]$ et $Var\, Y$.
d) Jules fait le trajet 400 fois par an. Introduire une suite de v.a. i.i.d. Y_i, afin d'exprimer $\bar{Y}_{400}$, son retard moyen par trajet sur un an.
e) A l'aide de la LGN, donner une approximation de $\bar{Y}_{400}$.
f) Calculer, à l'aide du TCL, la probabilité que $\bar{Y}_{400} \geq 3.2$, puis que $\bar{Y}_{400} \geq 5$.

119. A la roulette, il y a 37 numéros: 0,1,2,...,36. Le 0 est vert, les pairs sont rouges, les impairs sont noirs. Si on joue x $ sur le rouge, alors si le rouge tombe on empoche 2x $ (on a donc gagné x $), sinon on empoche 0 $ (on a donc perdu x $).
Un joueur joue 10 $ sur le rouge à chaque coup.
a) Soit X_i la v.a. qui vaut 1 si le rouge tombe au i-ème coup, 0 sinon. Donner la loi, l'espérance, la variance de X_i.
b) Soit G_n le gain accumulé par le joueur sur les n premiers coups. Exprimer G_n en fonctions des X_i, calculer son esperance et sa variance.
c) A l'aide du TCL, donner une approximation de la probabilité $P(G_{1000} > 0)$.

120. Une usine produit des pièces dont 3% ont un défaut. On prélève n pièces. Comment choisir n pour être sûr à 95% d'obtenir au moins 2000 pièces sans défaut?

121. (*?) Soit X_n une suite de v.a. i.i.d. de densité $f(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}\mathbf{1}_{\{x>0\}}$. Montrer que $\bar{X}_n$ tend vers l'infini en probabilité (i.e. que pout tout $A > 0$, $\lim_n P[\bar{X}_n < A] = 0$).

122. (**?) Soit X_n une suite de v.a. i.i.d. de densité $f(x) = \frac{a}{1+x^3}\mathbf{1}_{\{x>0\}}$. Trouver a, calculer $E[X_1]$, montrer que $\bar{X}_n$ tend en probabilité vers $E[X_1]$, mais que le TCL ne s'applique pas.